CAPÍTULO 10

DERIVADAS DIRECIONAIS

10.1 Introdução

Dada uma função

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array},$$

vimos que a derivada parcial de f com respeito à variável x_i no ponto X_0, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, fornece a taxa de variação da função f em relação à variação da variável x_i no ponto X_0. Desta forma, podemos interpretar que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ fornece a taxa de variação da função f numa determinada direção, que é uma direção coordenada. Para obter a taxa de variação da função numa direção arbitrária, utilizamos a *derivada direcional.*

10.2 Derivadas Direcionais

DEFINIÇÃO 10.2.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis e seja $\vec{u}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^n$. A *derivada direcional* de f no ponto X_0 na direção do vetor $\vec{u}$, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, é a função real definida por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t}.$$

O domínio de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ é o subconjunto de $Dom(f)$ para o qual o limite acima existe.

A derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0)$ denomina-se, também, *taxa de variação de f no ponto X_0 na direção do vetor $\vec{u}$.* Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) \quad \approx \quad \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t},$$

sendo que esta aproximação é tanto melhor quanto menor for $|t|$.

Exemplo 10.2.1: Seja $f(x,y)=x^2+y^2$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, onde $\vec{u}$ é o versor (vetor unitário correspondente) dos vetores dados abaixo.

a) $\vec{v}=(-1,1)$ b) $\vec{v}=(1,2)$ c) $\vec{v}=(1,1)$

Solução: Vamos trabalhar com o vetor unitário arbitrário $\vec{u}=(a,b)$ e calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ e depois substituir em cada caso acima.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((1,1)+t(a,b))-f(1,1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+ta,1+tb)-f(1,1)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1+ta)^2+(1+tb)^2-2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2+t^2a^2+2ta+2tb+t^2b^2-2}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^2a^2+2ta+2tb+t^2b^2}{t}=\lim_{t\to 0}ta^2+2a+2b+tb^2=2a+2b.
\end{aligned}$$

No caso (a), temos que $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = -2\,\frac{1}{\sqrt{2}}+2\,\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

No caso (b), temos que $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = 2\,\frac{1}{\sqrt{5}}+2\,\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Finalmente, no caso (c), temos que $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}+2\,\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

♡

10.3 Interpretação Geométrica

Seja f a função

$$\begin{array}{rcl} f: Dom(f)\subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ X=(x,y) & \mapsto & f(x,y)\end{array}$$

e sejam $(x_0,y_0)\in A(\text{aberto})\subseteq Dom(f)$ e $\vec{u}$ o vetor unitário dado por $\vec{u}=(a,b)$. Como (x_0,y_0) pertence a um aberto contido no domínio de f, temos que existe $\delta>0$, tal que $(x_0+at,y_0+bt)\in A(\text{aberto})\subseteq Dom(f)$, $\forall\ \ t\in[-\delta\,,\,\delta]$. Considere então a curva C parametrizada pela função γ dada por

$$\gamma(t)=(x_0+at,y_0+bt,g(t)),\quad t\in[-\delta\,,\,\delta],$$

onde $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$. Observe que, construída desta forma, C é uma curva contida no gráfico da função f, dada pela interseção do gráfico da função f com o plano vertical que contém a reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Note também que

$$\gamma'(t) = (a, b, g'(t)), \quad t \in (-\delta\,,\,\delta),$$

de modo que

$$\gamma'(0) = (a, b, g'(0)).$$

Desta forma, como

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \left(a, b, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)\right) \\ &= (a, b, 0) + \left(0, 0, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)\right). \end{aligned}$$

Como $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \tan \alpha,$$

onde α é o ângulo formado pelos vetores $\gamma'(0)$ e $(a, b, 0)$, o qual fornece a inclinação da reta tangente à curva C no ponto $\gamma(0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Temos portanto que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva C, no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, onde C é dada pela interseção do gráfico da função f com o plano vertical que contém a reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Observe que se $\vec{u} = (1, 0)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

e que se $\vec{u} = (0, 1)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

10.4 Derivada Direcional e Vetor Gradiente

Existe um conexão entre derivada direcional e vetor gradiente, no caso da função ser diferenciável. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 10.4.1: Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $X_0 \in A(\text{Aberto}) \subseteq Dom(f)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{u},$$

para todo vetor unitário $\vec{u}$ em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t}.$$

Como f é diferenciável em X_0, temos que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot H + erro(H)$$

onde $(\cdot)$ é o produto escalar e $erro(H)$ é tal que

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

Portanto, se f é diferenciável em X_0, fazendo $H = t\vec{u}$, e observando que $||H|| = ||t\vec{u}|| = |t|$, pois $\vec{u}$ é unitário, temos que

$$f(X_0 + t\vec{u}) \;=\; f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot t\vec{u} + erro(t\vec{u}), \tag{1}$$

onde,

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{erro(t\vec{u})}{|t|} = 0,$$

que equivale a

$$\lim_{t\to 0} \frac{erro(t\vec{u})}{t} = 0. \tag{2}$$

Desta forma, utilizando (1) na definição de derivada direcional, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot t\vec{u} + erro(t\vec{u}) - f(X_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\nabla f(X_0) \cdot \vec{u} + erro(t\vec{u})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\nabla f(X_0) \cdot \vec{u} + \frac{erro(t\vec{u})}{t} \right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (2) em (3), concluímos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) \;=\; \nabla f(X_0) \cdot \vec{u}.$$

□

Exemplo 10.4.1: Refaça o Exemplo 10.2.1.

É importante ressaltar que a diferenciabilidade da função f no ponto X_0 é essencial para valer a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) \quad = \quad \nabla f(X_0) \cdot \vec{u},$$

conforme pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 10.4.2: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, onde $\vec{u} = (a,b)$ é um vetor unitário dado e verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{u}$.

Solução: Temos, pela definição de derivada direcional, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{b^3t^3}{a^2t^2+b^2t^2}}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{b^3}{a^2+b^2} = b^3, \end{aligned}$$

pois, como $\vec{u} = (a,b)$ é um vetor unitário, temos que $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$.

Lembre-se que no Exemplo 6.4.1 verificamos que $\nabla f(0,0) = (0,1)$. Desta forma, temos que, de fato,

$$\nabla f(0,0) \cdot \vec{u} = (0,1) \cdot (a,b) = b \neq b^3 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0).$$

Lembre-se que no Exemplo 6.4.1 também verificamos que f é contínua na origem, mas não é diferenciável em (0,0).

♡

Observação 10.4.1: O Exemplo 10.4.1 acima mostra ainda que uma função f pode ser contínua em um ponto, possuir derivadas direcionais neste ponto em todas as direções e, mesmo assim, não se diferenciável neste ponto.

Utilizando o Teorema 10.4.1, podemos determinar em que direção a derivada direcional é máxima, e qual é o seu valor máximo.

TEOREMA 10.4.2: Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $X_0 \in A(\text{Aberto}) \subseteq Dom(f)$, tal que $\nabla f(X_0) \neq \vec{0}$, então:

a) O valor máximo da derivada direcional de f, no ponto X_0, ocorre quando $\vec{u_{max}} = \dfrac{\nabla f(X_0)}{||\nabla f(X_0)||}$ e, neste caso, este valor máximo é dado por $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}_{max}}(X_0) = ||\nabla f(X_0)||$. Temos assim, que $\vec{u}_{max}$ fornece a direção e sentido de maior crescimento da função, partindo-se do ponto X_0.

b) O valor mínimo da derivada direcional de f, no ponto X_0, ocorre quando $\vec{u}_{min} = -\dfrac{\nabla f(X_0)}{||\nabla f(X_0)||}$ e, neste caso, este valor mínimo é dado por $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}_{min}}(X_0) = -||\nabla f(X_0)||$. Temos assim, que $\vec{u}_{min}$ fornece a direção e sentido de maior decrescimento da função, partindo-se do ponto X_0.

c) O valor da derivada direcional de f, no ponto X_0, é nulo quando $\vec{u}$ é perpendicular à $\nabla f(X_0)$.

Exemplo 10.4.3: Seja $f(x, y) = x^2 y$.

a) Determine $\vec{u}$, de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ seja máxima.

b) Qual é o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$.

c) Estando-se no ponto $(1, 1)$, que direção e sentido devemos tomar para que f cresça mais rapidamente?

d) Estando-se no ponto $(1, 1)$, que direção e sentido devemos tomar para que f decresça mais rapidamente?

Solução:

a) De acordo com o teorema acima, temos que o vetor $\vec{u}$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é máxima é o vetor dado por

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(1, 1)}{||\nabla f(1, 1)||}.$$

Como

$$\nabla f(x, y) = (2xy\, ,\, x^2),$$

segue que

$$\nabla f(1,1) = (2,1),$$

de modo que o vetor $\vec{u}$ pedido é o vetor

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(1,1)}{||\nabla f(1,1)||} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2,1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

b) Novamente, de acordo com o teorema acima, temos que o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, que é obtido quando $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(1,1)}{||\nabla f(1,1)||}$, é dado por $||\nabla f(1,1)||$. Portanto, o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ é igual a $\sqrt{5}$.

c) Estando-se no ponto $(1,1)$, a direção e sentido que devemos tomar para que f cresça mais rapidamente é a direção e sentido do vetor $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(1,1)}{||\nabla f(1,1)||} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

d) Estando-se no ponto $(1,1)$, a direção e sentido que devemos tomar para que f decresça mais rapidamente é a direção e sentido do vetor $\vec{u} = -\dfrac{\nabla f(1,1)}{||\nabla f(1,1)||} = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

♡